Concours Général / Exercice 2 / 2023 / Corrigé

Partie A : Quelques exemples

1. Soit l'équation (X_n) : $x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0$.

1.a. Le produit des racines de cette équation, égal à -1, est strictement négatif. Cette équation a donc deux racines distinctes de signes opposés, et une seule racine x_n strictement positive, en l'occurrence :

$$x_n = \frac{-1 + \sqrt{4n^2+1}}{2n}$$

1.b et c. Des écritures équivalentes de x_n sont :

$$x_n = \frac{4n^2}{2n \times \left(1 + \sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{2n}{1 + \sqrt{4n^2+1}} = \frac{2}{\frac{1}{n} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}}$$

Avec la dernière écrite, nous obtenons sans aucune indétermination : $x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n = 1$, solution strictement positive de l'équation **1.c**. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

2. Soit l'équation (Y_n) : $\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0$

2.a. Le produit des racines de cette équation, égal à $-n$, est strictement négatif. Cette équation a donc deux racines distinctes de signes opposés, et une seule racine y_n strictement positive, en l'occurrence :

$$y_n = \frac{n + \sqrt{n^2+4n}}{2}$$

2.b. Une écriture équivalente de y_n est :

$$y_n = \frac{n}{2} \times \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}\right)$$

Nous obtenons sans aucune indétermination : $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ diverge vers plus l'infini.

3. Soit l'équation (Z_n) : $z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0$

3.a.i. Les fonctions carré et cube sont deux fonctions strictement croissantes sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En tant que somme de deux fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $z \longmapsto f_n(z) = z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ est une fonction strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3.a.ii. On note que : $\begin{cases} f_n(0) = -1 < 0 \\ f_n(1) = \frac{1}{n} > 0 \end{cases}$.

- La fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
- La fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- Les images par f_n des extrémités de cet intervalle sont (strictement) de signes contraires.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(z) = 0$ possède une solution unique z_n dans l'intervalle $]0\,;1[$.

La croissante stricte de f_n sur l'intervalle$[0\,;\ +\infty[$ justifie que $z > 1 \ \Rightarrow\ f_n(z) > f_n(1) = \frac{1}{n} > 0$. L'équation $f_n(z) = 0$ ne possède aucune autre solution que z_n dans l'intervalle$[0\,;\ +\infty[$.

Le nombre z_n est l'unique solution réelle positive de l'équation $f_n(z) = 0$.

3.b. Pour tout entier $n > 0$, considérons le nombre réel z_n unique solution de l'équation $f_n(z) = 0$.

Ce nombre vérifie la relation : ${z_n}^3 + \frac{1}{n}{z_n}^2 - 1$ soit, aussi bien, la relation : ${z_n}^3 = -\frac{1}{n}{z_n}^2 + 1$

Etudions son image par la fonction f_{n+1} :

$$f_{n+1}(z_n) = {z_n}^3 + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1 = \left(-\frac{1}{n}{z_n}^2 + 1\right) + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1 = -\frac{{z_n}^2}{n(n+1)}$$

L'image de z_n par la fonction f_{n+1} est strictement négative. Le nombre z_n est donc situé avant le nombre d'image 0 par f_{n+1} :

$$f_{n+1}(z_n) < 0 \ \Rightarrow\ z_n < z_{n+1}$$

Nous en déduisons que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante.

Etant une suite strictement croissante et majorée (par le réel 1), cette suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Elle possède une limite z_∞ qui est ≤ 1.

3.c. Passons à la limite dans la relation annulative qui définit z_n :

$$\lim_{n\to\infty}\left({z_n}^3 + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1\right) = 0$$

Or : $\lim\limits_{n\to\infty}\left({z_n}^3 + \frac{1}{n+1}{z_n}^2 - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}({z_n}^3) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}{z_n}^2\right) - 1 = {z_\infty}^3 - 1$

En conséquence : ${z_\infty}^3 - 1 = 0$

Le nombre réel z_∞ est une solution de l'équation : $z^3 - 1 = 0$.

4. Soit l'équation (T_n) : $\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0$

Considérons la fonction $t \mapsto g_n(t) = \frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1$

Elle est clairement strictement négative (somme de trois termes négatifs dont un strictement) sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$. L'équation (T_n) n'a pas de solution sur cet intervalle.

Etudions g_n sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Elle y admet pour dérivée la fonction : $t \longmapsto g_n{}'(t) = \frac{3}{n}t^2 - 2t = \frac{t}{n}(3t - 2n)$ qui est négative sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{2n}{3}\right]$ puis strictement positive pour $t > \frac{2n}{3}$. La fonction g_n est ainsi décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{2n}{3}\right]$, admet un minimum $g_n\left(\frac{2n}{3}\right) = -1 - \frac{4n^2}{27} < 0$ puis est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{3}\,;\,+\infty\right[$.

On note que : $\begin{cases} g_n(n) = -1 < 0 \\ g_n(n+1) = \frac{n^2+n+1}{n} > 0 \end{cases}$.

- La fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n\,;n+1]$.
- La fonction g_n est continue sur l'intervalle $[n\,;n+1]$ (en tant que fonction polynomiale).
- Les images par g_n des extrémités de cet intervalle sont (strictement) de signes contraires.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

L'équation $g_n(t) = 0$ possède une solution unique t_n dans l'intervalle $]n\,;n+1[$.

La croissante stricte de g_n sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{3}\,;\,+\infty\right[$ justifie qu'il n'y a pas d'autre solution à cette équation. Le nombre t_n est l'unique solution réelle de l'équation $t_n(z) = 0$.

Le fait d'avoir localisé t_n dans l'intervalle $]n\,;\,n+1[$ permet de dire que, pour tout entier n :

$$n < t_n < n+1 < t_{n+1}$$

La suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et diverge vers plus l'infini.

Avec TI-Nspire CAS, valeurs approchées des nombres z_n et t_n pour n allant de 1 à 10.	zedenne(10) {1.,0.754878,1.46557} {2.,0.858094,2.3593} {3.,0.90033,3.27902} {4.,0.923228,4.22417} {5.,0.937581,5.18592} {6.,0.947417,6.15821} {7.,0.954577,7.13741} {8.,0.960021,8.12129} {9.,0.964301,9.10848} {10.,0.967753,10.0981}	"zedenne" enregistr. effectué Define **zedenne**(n)= Prgm Define $f(k,z)=z^3+\frac{z^2}{k}-1$ Define $g(k,t)=\frac{t^3}{k}-t^2-1$ For k,1,n Disp {k,zeros(f(k,z),z)[1],zeros(g(k,t),t)[1]} EndFor EndPrgm

Partie B : Polynômes sympathiques

5. Un polynôme de degré au plus d est initialement et faussement sympathique si et seulement si $a_0 = -1$ et pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq d$, $a_k = 0$ puisque a_k doit être alors à la fois positif et négatif (au sens large).

Seul, le polynôme constant et égal à -1 est à la fois initialement et faussement sympathique.

6. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus *d*.

Si *P* est faussement sympathique, alors $a_0 = -1$ et tous les autres coefficients sont négatifs ou nuls.

6.a. Pour tout *x* appartenant à $[0, +\infty[$, $P(x)$ est somme de nombres tous négatifs, dont l'est strictement. Donc :

$P(x) < 0$ quel que soit *x* appartenant à $[0, +\infty[$.

6.b. Toutes les fonctions puissances d'exposant > 0 sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$. Puisque tous les a_k $(1 \leq k \leq d)$ sont négatifs ou nuls, toutes les fonctions $x \longmapsto a_k x^k$ $(1 \leq k \leq d)$ sont nulles ou strictement décroissantes (donc décroissantes au sens large) sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \longmapsto P(x)$ est somme de fonctions décroissantes (au sens large : strictement décroissantes ou constantes) sur $[0, +\infty[$:

La fonction $x \longmapsto P(x)$ est elle-même décroissante sur $[0, +\infty[$.

7. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus *d*.

Si *P* est à la fois vraiment et initialement sympathique, il se présente sous la forme suivante :

$P(x) = a_d x^d + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} - 1$ où tous les a_j $(k + 1 \leq j \leq d)$ sont positifs ou nuls avec $a_{k+1} > 0$. En effet, les a_j d'indice $\leq k$ sont à la fois négatifs ou nuls (hypothèse « vraiment ») et positifs ou nuls (hypothèse « initialement »), donc ils sont nuls.

7.a. Toutes les fonctions puissances d'exposant > 0 sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$.

Puisque tous les a_j $(k + 1 \leq j \leq d)$ sont positifs ou nuls, un au moins étant strictement positif, toutes ces fonctions $x \longmapsto a_j x^j$ croissantes sur $[0, +\infty[$, l'une au moins l'étant strictement. La fonction $x \longmapsto P(x)$ est somme de fonctions croissantes sur $[0, +\infty[$, l'une au moins l'étant strictement.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ est donc elle-même strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

7.b. La fonction $x \longmapsto a_{k+1} x^{k+1} - 1$ a pour limite plus l'infini en plus l'infini.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ apparaît comme la somme d'une fonction qui a pour limite plus l'infini en plus l'infini et de fonctions positives. Elle a pour limite plus l'infini en plus l'infini.

La fonction $x \longmapsto P(x)$ étant strictement croissante et continue sur $[0, +\infty[$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son intervalle image $\left[P(0) = -1, \lim_{+\infty} P = +\infty\right[$. Elle prend une fois et une seule toute valeur de cat intervalle, en particulier la valeur 0 (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

L'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

8. Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré au plus *d*.

Si *P* est vraiment mais pas initialement sympathique, il se présente sous la forme suivante :

$P(x) = \left(a_d x^d + \cdots + a_{k+1}x^{k+1}\right) + \left(a_k x^k + \cdots - 1\right)$ où tous les a_j pour $k+1 \leq j \leq d$ sont positifs ou nuls avec $a_{k+1} > 0$ et où tous les a_j d'indice $\leq k$ sont négatifs, l'un au moins parmi ceux de $\{1\,;2\,;\ldots;k\}$ l'étant strictement (puisque « non initialement »).

Dérivons : $P'(x) = \left(da_d x^{d-1} + \cdots + (k+1)a_{k+1}x^k\right) + \left(ka_k x^{k-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1\right)$

Notons $\ell + 1$ le plus petit indice parmi ceux de $\{1\,;2\,;\ldots;k\}$ qui est strictement négatif.

$$P'(x) = \left(da_d x^{d-1} + \cdots + (k+1)a_{k+1}x^k\right) + \left(ka_k x^{k-1} + \cdots + a_{\ell+1}x^\ell\right)$$

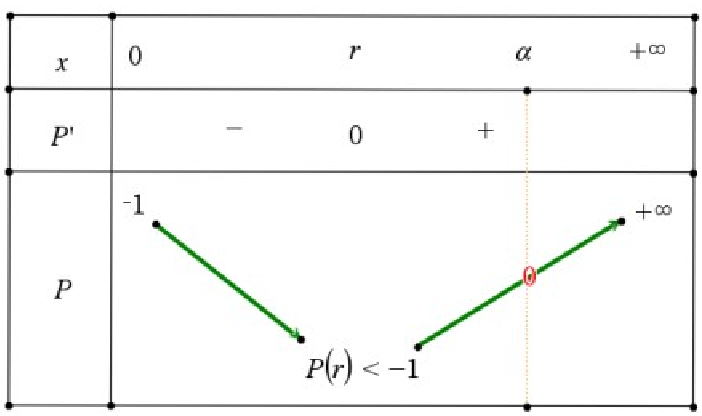
$$P'(x) = |a_{\ell+1}|x^\ell\left[\left(\frac{da_d}{|a_{\ell+1}|}x^{d-\ell-1} + \cdots + \frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell}\right) + \left(\frac{ka_k}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell-1} + \cdots + (-1)\right)\right]$$

Le polynôme $Q(x) = \left(\frac{da_d}{|a_{\ell+1}|}x^{d-\ell-1} + \cdots + \frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell}\right) + \left(\frac{ka_k}{|a_{\ell+1}|}x^{k-\ell-1} + \cdots + (-1)\right)$ est un polynôme vraiment sympathique car son coefficient constant est égal à -1, ses premiers coefficients sont négatifs ou nuls, puis $\frac{(k+1)a_{k+1}}{|a_{\ell+1}|}$ est strictement positif et ses suivants sont positifs.

Cette fonction polynôme *Q* vérifie les hypothèses de la question précédente, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son intervalle image $[-1, +\infty[$. Il en résulte que *P'* est d'abord strictement négative jusqu'à la solution *r* de l'équation $Q(x) = 0$ puis strictement positive.

8.b. On peut résumer l'étude demandée dans le tableau de variations ci-contre, qui met en évidence l'existence d'une unique solution α strictement positive de l'équation $P(x) = 0$

En effet, des conditions analogues (continuité, stricte monotonie, changement de signe) à celles de la question **7.b.** sont réunies.



(Notamment : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_{k+1}x^{k+1}\left[\left(a_d x^{d-k-1} + \cdots + 1\right) + \left(\frac{a_k}{x} + \cdots - \frac{1}{x^{k+1}}\right)\right]\right) = +\infty$).

9. En résumé de cette partie, soit *P* un polynôme de degré au plus *d* et tel que $a_0 = -1$. Classifions les polynômes sympathiques suivant les propriétés des autres coefficients a_j où $1 \leq j \leq d$:

<table>
<tr><th>Propriétés</th><th>Sympathie</th><th>$P(x) = 0$</th><th>Signe sur $[0\,;\,+\infty[$</th></tr>
<tr><td>$a_j \leq 0$ (tous)</td><td>Faussement</td><td>Aucune solution</td><td>$P(x) \leq -1$</td></tr>
<tr><td>$a_j \geq 0$ (tous)</td><td>Initialement</td><td rowspan="2">Une seule α</td><td rowspan="2">Sur $[0\,;\,\alpha[: P(x) < 0$
Sur $]\alpha\,;\,+\infty[: P(x) > 0$</td></tr>
<tr><td>Il existe k tel que $1 \leq k \leq d-1$:
$a_j \leq 0$ si $1 \leq j \leq k$
$a_{k+1} > 0$
$a_j \geq 0$ si $k+2 \leq j \leq d$</td><td>Vraiment</td></tr>
</table>

Partie C : De la suite dans les idées.

10. On sait que, si une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite u_∞, alors pour tout réel λ la suite $(\lambda u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\lambda . u_\infty$ (homogénéité). On sait aussi qu'une somme de suites convergentes est convergente vers la somme de leurs limites (additivité).

Soit alors *t* fixé.

- Pour tout entier *k* tel $0 \leq k \leq d$, la suite $\left(a_{k,n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $a_{k,\infty}$ donc d'après la propriété d'homogénéité, la suite $\left(a_{k,n} \times t^k\right)_{n\geq 1}$ converge vers $a_{k,\infty} \times t^k$
- D'après la propriété d'additivité, la somme $\left(P_n(t) = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} \times t^k\right)_{n\geq 1}$ converge vers :
  $\sum_{k=0}^{d} a_{k,\infty} \times t^k = P_\infty(t)$

11. Soit une suite de polynômes vraiment sympathiques de degré au plus *d* dont les suites de coefficients convergent : $P_n(x) = a_{d,n}x^d + \cdots + a_{1,n}x + a_{0,n}$. L'hypothèse de « vraie sympathie » implique deux choses :

- La suite $\left(a_{0,n}\right)_{n\geq 1}$ est constante et égale à $-1 = a_{0,\infty}$
- Il existe une infinité de termes $a_{j,n}$ qui sont strictement positifs et qui séparent la liste de coefficients en deux, les $a_{i,n}$ d'indices $i < j$ sont négatifs ou nuls, les $a_{i,n}$ d'indices $i > j$ sont positifs ou nuls (puisque chaque P_n a au moins un tel séparateur).

Parmi les *d* suites $\left(a_{d,n}\right)_{n\geq 1}$; … ; $\left(a_{1,n}\right)_{n\geq 1}$ de coefficients, il y en a au moins une qui contient une infinité de séparateurs. Soit $k+1$ son indice. Cette suite $\left(a_{k+1,n}\right)_{n\geq 1}$ contenant une infinité de séparateurs strictement positifs, ne peut converger que vers une limite positive ou nulle : $a_{k+1,\infty} \geq 0$.

Pour $i \leq k$, la suite $(a_{i,n})_{n\geq 1}$ contient une infinité de termes négatifs ou nuls. Elle ne peut converger que vers une limite négative ou nulle : $a_{i,\infty} \leq 0$.

Pour $i > k+1$, la suite $(a_{i,n})_{n\geq 1}$ contient une infinité de termes positifs ou nuls. Elle ne peut converger que vers une limite positive ou nulle : $a_{i,\infty} \geq 0$.

Ainsi, de deux choses l'une :

- Ou bien l'un des $a_{i,\infty}$ parmi ceux d'indices $k+1 \leq i \leq d$ est strictement positif et dans ce cas on obtient un polynôme dont les premiers coefficients sont négatifs ou nuls, puis il y a un coefficient strictement positif suivi de coefficients positifs ou nuls, le polynôme P_∞ est vraiment sympathique.
- Ou bien $a_{i,\infty} = 0$ pour tout i tel que $k+1 \leq i \leq d$ et dans ce cas on obtient un polynôme dont tous les coefficients sont négatifs ou nuls, P_∞ est faussement sympathique.

12. Supposons que P_∞ soit vraiment sympathique, et soit x_∞ son zéro.

12.a. Soit u et v deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Compte tenu des résultats obtenus dans le cas de « vraie sympathie », ce rangement implique que : $P_\infty(u) < 0 < P_\infty(v)$.

Posons $\varepsilon = \min\left(\frac{|P_\infty(u)|}{2} ; \frac{P_\infty(v)}{2}\right)$.

- $(P_n(u))_{n\geq 1}$ convergeant vers $P_\infty(u)$, il existe un entier n_u tel que : $n \geq n_u \implies |P_n(u) - P_\infty(u)| \leq \varepsilon$ et dans ce cas : $\frac{3}{2}P_\infty(u) \leq P_n(u) \leq \frac{1}{2}P_\infty(u) < 0$
- $(P_n(v))_{n\geq 1}$ convergeant vers $P_\infty(v)$, il existe un entier n_v tel que : $n \geq n_v \implies |P_n(v) - P_\infty(v)| \leq \varepsilon$ et dans ce cas : $0 < \frac{1}{2}P_\infty(v) \leq P_n(v) \leq \frac{3}{2}P_\infty(v)$

Considérons le nombre entier $M(u,v) = \max(n_u ; n_v)$. Pour tout entier $n \geq M(u,v)$, les deux conditions précédentes sont simultanément vérifiées, et nous obtenons : $n \geq M(u,v) \implies P_n(u) < 0 < P_n(v)$.

12.b. Soit α un réel strictement positif (aussi petit que l'on veut).

Appliquons les résultats du **12.a** avec $u = x_\infty - \alpha$ et $v = x_\infty + \alpha$.

Il existe un nombre entier M_α tel que : $n \geq M_\alpha \implies P_n(x_\infty - \alpha) < 0 < P_n(x_\infty + \alpha)$. Nous pouvons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[x_\infty - \alpha ; x_\infty + \alpha]$, intervalle sur lequel ces polynômes P_n sont des fonctions continues et changeant de signe : leur zéro est dans cet intervalle.

Pour tout réel strictement positif α (aussi petit que l'on veut), il existe un nombre entier M_α tel que :

$$n \geq M_\alpha \implies |x_n - x_\infty| \leq \alpha$$

Ce qui prouve la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vers x_∞.

13. Nous avons vu dans la résolution de la **question 11** que nous obtenons un polynôme P_∞ faussement sympathique dans le cas où toutes les suites $(a_{j,n})_{n\geq 1}$ de coefficients positifs convergent vers 0.

Pour tout réel α strictement positif (aussi petit que l'on veut), il existe un entier n_α tel que :

$n \geq n_\alpha \implies \max_j(a_{j,n}) \leq \alpha$.

Dans ce cadre, pour tout réel $x > 0$, $n \geq n_\alpha \implies P_n(x) \leq -1 + \alpha(1 + x + \cdots + x^d)$.

En particulier, en ce qui concerne la solution x_n de l'équation $P_n(x) = 0$, nous obtenons l'inégalité :

$n \geq n_\alpha \implies 1 + x_n + \cdots + {x_n}^d \geq \frac{1}{\alpha}$. Et ce nombre $\frac{1}{\alpha}$ peut être rendu « aussi grand que l'on veut ».

Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty}(1 + x_n + \cdots + {x_n}^d) = +\infty$ et s'il en est ainsi, c'est que $\lim_{n\to+\infty}(x_n) = +\infty$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ diverge vers plus l'infini.

14. Dans la **partie A.1 et 3**, les polynômes P_∞ sont les polynômes $P_\infty(x) = x^2 - 1$ et $P_\infty(z) = z^3 - 1$ qui sont vraiment sympathiques et pour lesquels la racine strictement positive est égale à 1. Il y a convergence vers 1.

Dans la **partie A.2 et 4**, les polynômes P_∞ sont les polynômes $P_\infty(y) = -y - 1$ et $P_\infty(t) = -t^2 - 1$ qui sont faussement sympathiques. Il y a divergence vers plus l'infini.